

## The Cube Law

## LEGEA CUBULUI

S.G. SEBE

*This paper presents the main steps relating the cube law in its empirical form and Taagepera's seats votes system. We discuss here several relationships between weak proportional representation and the political spectra. These relationships are related to the generalization of a result of Theil.*

P reocupările politiștilor de a oferi o bază atributului științific au urmat o cale similară multor alte domenii în care dotarea teoriei cu putere de predicție nenulă trece inevitabil prin hățișul conjecturilor izvorâte din partea empirică a fenomenelor studiate.

Una dintre temele de bază ale științei politice este oferită de ceea ce vom numi, cel puțin la nivel intuitiv, procese electorale, printr-o întrebare de care se lovesc cei ce practică politica, și anume: care este relația dintre bazinele electorale și ponderea de decizie individualizată pe actorii politici? Legea cubului este prima încercare de răspuns la această problemă a cărei importanță o considerăm dincolo de orice discuție.

Initial, legea cubului a fost gândită drept o caracteristică a proceselor electorale proprie sistemelor politice bipartidiste, iar la prima vedere ea nu ar avea vreo legătură cu cazul în care reprezentarea proporțională postulată prin mijloace juridice ar imprima un caracter distinct sistemului.

La acest punct este deosebit de utilă o idee emisă explicit de Haret (S. Haret, 1969) conform căreia, dacă vrem să atingem un stadiu de înțelegere profundă a fenomenelor sociale, se impune să găsim mai întâi mijloace prin care ideea de parametrizare a proceselor din mecanica rațională să-și găsească corespondent prin intermediul analogiei în cadrul abstract din structura teoriei pe care ne propunem s-o construim. În contextul afirmațiilor din paragraful precedent acest fapt este de o importanță aparte, deoarece a condus la identificarea și clarificarea direcției spre care au evoluat lucrările fundamentale în domeniul pe subiectul în cauză; pentru a aprecia corect semnificația acestui fapt, primul pas este exact acesta: din evoluția conceptelor implicate în studiul fenomenului să deducem un cadru național cu rol explicativ și de interpretare.

Pe de altă parte, această lege constituie, după o lungă perioadă, o nouă cale a demersului de cercetare în știința politică. Cum este bine știut, lucrările matematicienilor francezi din perioada iluministă (Borda, 1953; Condorcet, 1785; Lhuillier, 1794 etc.) au fundamentat o direcție nouă în "aritmetică morală" prin formalizarea unei clase de concepte cheie prezente în speculațiile discursivee din știința politică a vremii (Rousseau, 1938). Această etapă a oferit o bază solidă pentru începuturile teoriei alegerii sociale, însă problema predicției în procesul de transformare a opțiunilor corpului social haretian în forță de decizie individualizată pe actori ai spectrului politic era lăsată în negură deducțiilor implicate. Legea cubului vine să atragă atenția asupra unei posibile rezolvări pe cale empirică a conjecturii privind exact această problemă și este primul pas diferit ce a apărut la mai bine de 120 de ani de la contribuțiile menționate mai sus.

Știința politică din România este într-o ipostază originală care își dovedește dificultatea dintr-un punct de vedere inedit. Ea trebuie acum să facă față cel puțin unei absențe de preocupare asupra direcțiilor de cercetare dezvoltare în ultimii 50 de ani în societățile occidentale pentru temele pere-ne ale acestui domeniu. Având în vedere această stare de fapt, înainte de a încerca soluții originale se cuvine să oferim, mai modești, un răspuns la următoarea întrebare: cum au evoluat ideile asupra legii cubului de la constatarea sa empirică din 1906 până la sistemul voturi-locuri propus de Taagepera în 1989? Abia apoi vom putea decela, din cunoștința acestei evoluții, direcții cu un grad mai accentuat sau mai vag de rigoare și/sau utilitate. Aceasta fiind unul dintre obiectivele principale ale articolului de față, se cuvine să indicăm și un mijloc de a-l include în demersul specific științelor sociale.

Un punct de vedere exprimabil la nivel generic este totuși necesar. Din cele cunoscute până la această oră, o contribuție

de seamă găsim în ideea de succesiune datorată lui Xenopol (Xenopol, 1904). Fără a intra în alte detalii, aceasta va fi aplicată implicit pe cazul în discuție. Mai exact, vom pune în evidență cum au evoluat ideile asupra legii cubului, ori, altfel spus, care este seria de succesiune a cadrului notional aferent subiectului amintit; numai așa vom putea dobândi idei clare despre o perioadă despre care suntem cel puțin nevoiți să ne interesăm. Se cuvine să notăm două fapte: în primul rând, deși acesta este un exemplu, combinat cu modul de gândire haretian se poate lesne constitui într-un pattern, iar în al doilea rând, opoziția pe care o scoate în evidență Xenopol între fenomenele de repetiție și cele de succesiune ar putea, numai la o vedere superficială, lăsa impresia că probabilitatea ca și concept nu este de folos în acest demers<sup>1</sup>; vom constata că afirmația este valabilă numai privind pasul de inițiere din maieutica unui model, ceea ce constituie o valorificare a moștenirii ce constă în clasificarea amintită.

Aceste două atitudini asupra subiectului în discuție constituie punctele de plecare în cercetarea evoluției conceptelor ce formează cadrul în care are sens problema predicției în procesul menționat mai înainte, i.e. transformarea opțiunii politice în decizie individualizată în context socio-politic. Tot aici vom constata că de fapt calea indicată de Haret privind analogia de concepte specifică mecanicii sociale dispune de mijloace puternice care plasează problematica spre actualitate. Mai exact, tehniciile de tip variațional care induc un cadr coherent pentru cuvântul *optim*, puse de Haret la baza arsenalului de mijloace cu care obiectivele analogiei devin realizabile și utile sociologic vorbind, conduc la interpretări conform căror generalizările legii cubului permit determinarea unui nivel optim de reducere a tensiunilor sociale într-o organizație de un anumit tip. Dacă plasăm aceste idei în contextul mai general și mai generos al teoriei satisfacției, atunci avem

un prim argument pentru utilitatea acestui gen de demers.

În această accepțiune, primul pas ce trebuie făcut constă în a detecta, spre folosul politistului în formare și spre informarea celui ce dorește să analizeze astfel de fenomene, celealte momente până în actualitate, și abia apoi putem aborda construirea unui cadru de răspuns la întrebări intuitiv simple și clare, dar dincolo de speculații discursivee, practic imposibil de tratat.

Pentru a fi în măsură de a formula o problemă dintr-un domeniu în care cel mai adesea analogia discursivă ține loc de argument putem găsi un sprijin considerabil în orientările de principiu privind studiul fenomenelor sociale conținute în moștenirea haretiană.

Primul pas în această direcție se rezumă la a porni cu atitudinea celor ce studiază problema în esență ei, fără a opera reducții la nivel de principii. Mai exact, mesajul haretian pe acest subiect s-ar putea formula astfel: mecanica socială nu coincide cu aplicarea metodelor mecanicii rationale în sociologie, întrucât prin aceasta am obține cel mult un corp de tehnici de tip matematic care au un statut de anexă, constituind mijloace auxiliare pentru problemele tratate. Semnificația sa se referă la o integrare mai profundă între cele două elemente astfel ca mecanica ratională văzută din perspectiva filosofiei naturale să ofere baza formală necesară teoriilor sociologice prin intermediul conceptului de model matematic.

Un astfel de punct de vedere a apărut explicit formulat în ceea ce se poate numi, de la Cournot, (Cournot, 1974) economie matematică, și la rându-i, prelungind ideile matematicienilor francezi din perioada iluministă amintiți mai înainte. Ulterior, el a fost transferat și asupra psihologiei.

Se impune încă o precizare referitoare la alegerea mecanicii sociale în locul celei denumite azi sociologie matematică. Haret pornește cu ideea conform căreia

dacă se dorește tratarea formală a fenomenelor sociale, atunci trebuie incluse în demersul sociologic cel puțin câteva concepte ca: echilibru, tensiune, stabilitate etc. De aici, atâtă vreme cât acestea sunt specifice mecanicii raționale, acolo trebuie plasat termenul analogie. Prin aceasta nu se aduce vreun prejudiciu sociologiei matematice deoarece este folositor să gândim mecanica socială drept o analiză a obiectivelor, iar sociologia matematică drept una a mijloacelor, fără a plasa una în subordinea celeilalte deoarece tocmai interacțiunea dintre obiective și mijloace conduce la integrarea oferită prin conceptul de model matematic.

Articolul de față prezintă în spiritul de mai sus evoluția ideilor asupra așa numitei legi a cubului, de la stadiul de conjectură empirică, la cel de instrument al politicii comparate. Rezultatele analitice și ideile legate de acestea privind influența interacției dintre actorii politici asupra conceptului de reprezentare proporțională la scara unui ciclu electoral sunt, după cunoștința autorului, noi. Pe de o parte, acestea au fost expuse doar la nivel pur teoretic, deoarece, înainte să trecem la aspecte numerice, trebuie să știm ce semnifică acestea; în acest sens metodele prin care se cuplă teoria scalelor de măsurare sociologică cu problema estimării elementelor matricii de interacție este deschisă, alături de altele menționate pe parcurs. Pe de altă parte, ele constituie un prim pas către o dinamică a aspectelor legate de evoluția acestui concept la nivel social pe intervalele de timp menționate, fiind indusă ca preocupare de către o conjectură datorată lui Marcel Ivan ce va fi tratată cu altă ocazie.

### Analiza Kendall-Stuart

Preocupările britanice în domeniul științei politice s-au distins la începutul acestui secol și prin două contribuții legate

de descoperirea pe cale empirică a unor regularități pe baza cărora să se poată satisface necesitatea de a caracteriza analitic relația locuri-voturi.

Prima dintre acestea datează din 1898 și este datorată lui Edgeworth (Edgeworth, 1898), care a avut ideea de a folosi distribuția voturilor pe circumscripțiile engleze pentru a determina distribuția locurilor corespunzătoare. În demersul său el remarcă faptul că distribuția menționată este o aproximare a celei normale; spectrul politic considerat la acea dată era în principiu bipartidist. De aici s-a născut ideea unei posibile relații analitice a cărei validitate rămânea de confirmat și pe alte situații. Faptul important constă în aceea că acum se întrevede o metodă pentru abordarea problemei.

Cățiva ani mai târziu, în 1909, J.P. Smith aduce în atenție un caz particular al unei relații atribuite de acesta unui prieten matematician, P.A. MacMahon, al cărei enunț, aşa cum reiese dintr-un caz numeric redactat în Minuta de evidență din fața Comisiei Regale din 19 mai 1909, este următorul<sup>2</sup>:

"Dacă într-un proces electoral ce se desfășoară pe un teritoriu electoral precizat avem doi actori politici identificați prin indicii 1 și 2 care dobândesc locurile  $q_1$  și  $q_2$  respectiv ponderile de voturi  $p_1$  și  $p_2$ , atunci

$$\frac{q_1}{q_2} \geq \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^3 \quad (1.1)$$

egalitatea operând în vecinătatea valorii  $p_1 = 1/2$ ."

Acest enunț este numit de autorii articolelor (Kendall și Stuart, 1950) legea lui MacMahon, iar cazul obținut pentru egalitate, legea cubului, atribuită lui Smith.

Primul pas făcut de Kendall și Stuart constă în a amenda enunțul atribuit lui Smith înălțând din acesta o afirmație contradictorie care dovedește că relația nu putea fi dedusă pe cale matematică. De aici avem stabilit ce numim legea cubului așa cum apare ea în prima sa variantă empirică:

relația analitică între ponderile electorale și ponderile de putere politică conținută în egalitatea

$$\frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^3$$

Restrictiile de context impuse de autori sunt: (KS I) legea cubului se referă *numai* la locurile obținute de două partide principale (majore) dintre care unul are numărul maxim de voturi; (KS II) proporția calculată pentru fiecare circumscripție are la numărator voturile partidului câștigător al majorității Carnerei Comunelor, iar la numitor suma celorlalte partide din circumscripție (sau din țară), și (KS III) circumscripțiile ce au două locuri alocabile sunt private ca două circumscripții. Fiecare dintre aceste afirmații a avut consecințe ulterioare: prima a generat conceptul de partid relevant promovat de Sartori (Sartori, 1976) care preia anumite idei ale lui Theil (Theil, 1969). A doua inspiră extinderea empirică a lui Qualter (Qualter, 1968) care cuprinde cazul unui spectru mai larg decât cel bipartidist. În fine, ultima indică subiectul de analiză privind rostul unor noi variabile, fapt valorificat de Taagepera (Taagepera, 1973).

Apare problema de a vedea care este legătura cu observația lui Edgeworth. Pasul următor constă deci în a deduce funcția de repartiție a legii cubului, pentru a decide relația acesteia cu legea normală în cazul alegerilor studiate. Calculând valorile tipice necesare pentru comparație (momentele de diverse ordine; vezi pentru abordarea riguroasă a procedeului (Iosifescu, Mihoc, Theodorescu, 1966)) se ajunge la concluzia că, în cazul în care varianța îndeplinește anumite condiții pentru situația electorală engleză din anii menționați, aproximarea este acceptabilă (cf. Kendall & Stuart, 1950, pp. 190-2).

Din punct de vedere statistic problema de bază constă în a decide dacă modul în care concepe Smith procesul de explicație a distribuției de voturi, i.e. ca efect al eșantionării simple aleatoare, este accep-

tabil în contextul procesului electoral sau nu. Analiza lui Kendall și Stuart asupra acestui fapt arată că (cf. Kendall, Stuart, 1950, pp. 187-8, 194-5) această distribuție nu se poate explica ca efect de tip limită centrală iar interpretarea de tip sociologic constă chiar în aceea că votanții dintr-o circumscripție care au vederi politice *similară* tind să se grupeze (bineînțeles, nu în sensul că se întunesc undeva, ci trebuie tratați drept coruri sociale reprezentative ale unei opinii politice). Pentru a conștientiza importanța acestui fapt, să-i notăm consecințele:

1. combinată cu observația asupra variației lente în timp pe parcursul unui proces electoral (de la o alegere la alta) a varianței distribuției discutate (vezi Kendall, Stuart, 1950, pp. 191) ea impune conjectura conținută în ipoteza de omogenitate a lui Taagepera (vezi mai jos).
2. indică în mod explicit faptul că *dacă* ne interesează aspecte de tip predictiv pe termen mai scurt atunci cu siguranță trebuie să schimbă metodele matematice, deși aceeași problemă referitoare la termen lung rămâne deschisă.

Alături de alte idei tehnice, cum ar fi cea a determinării prin ecuații funcționale a relației locuri-voturi, etc., analiza Kendall-Stuart reprezintă punctul de pornire esențial pentru studiul conjecturilor specifice științei politice care nu pot fi lăsate la stadiul de demers pur discursiv.

## Reformularea Duverger

Problemele ridicate de analiza Kendall-Stuart nu au rămas fără efect în lumea politistilor, iar dintre acestea, cele legate de partea sociologică au fost în mod natural asimilate mai rapid în preocupările perene ale acestora.

Dintre circumstanțele contextuale proprii sistemului electoral din care a izvorât constatarea empirică denumită generic

"legea cubului", scrutinul majoritar era printre primele elemente ale căror consecințe se cereau analizate, mai ales pentru a detecta semnificația acestuia. Etapa aceasta este importantă prin configurarea unui răspuns privind rostul generalizării însăși.

Ne vom opri în continuare asupra contribuților lui Duverger, din următoarele motive: a fost primul care a pus în evidență o caracteristică necesară a conținutului pe care conceptual de lege trebuie să-l acopere în domeniul științei politice: compatibilitatea cu conceptul de lege sociologică; a descompus problema influenței sistemului de scrutin în *efekte* care permit, urmând o cale de analiză similară celei haretiene să formulăm conjecturi referitoare la fenomenele socio-politice. Prin aceasta se deschide calea testării afirmațiilor premergătoare formulării legilor, *dacă* dispunem de o teorie de măsurare; a introdus o clasificare a proceselor socio-politice care combinată cu maniera de analiză anterior menționată permite introducerea unor parametri de sensibilitate proprii interacțiiei interne sistemului socio-politic (vezi de exemplu, Duverger, 1976, p. 420).

În acest context a fost pusă în evidență o posibilă cauză de perturbare a legii cubului, fapt ce a fost ulterior (peste 20 de ani!) valorificat de Taagepera.

Trecem acum la detalierea necesară înțelegerei ultimei aserționi în cadrul oferit de primele trei, deoarece această analiză constituie o etapă preliminară în justificarea variabilelor utilizate de soluția formală propusă de Taagepera în contextul generalizării oferite de Theil.

Ideea de bază pusă în fundamentalul conceptului de lege de către Duverger are puncte de coincidență cu concepția lui Xenopol privind semnificația acestuia în contextul fenomenelor de succesiune. De altfel, atât în cazul legii cubului, cât și al celor ce-i poartă numele, maniera de analiză a factorilor de influență asupra efectelor formulabile datorate tipului de scrutin pornește în etapele premergătoare

cristalizării conjecturii cu studiul fenomenului indexat istoric. Din nou, această remarcă nu ștearbește cu nimic meritele și originalitatea incontestabilă a lui Duverger, ci scoate în evidență perenitatea și valoarea unui punct de vedere necesar unei etape de investigare dificil de formalizat.

Efectele prin a căror analiză inferează indicii de construcție a conjecturilor sunt clasificabile în două categorii, una obiectivă fiind impusă și rigidă pe perioade lungi de timp - tipul de scrutin, iar cealaltă, subiectivă în contextul sistemului și schimbătoare prin natura ei receptivă și dinamică - mutațiile din corpul electoral al opiniei publice.

Concluzia esențială este că studiul *interacției* acestor două efecte pe intervale de timp suficient de lungi în raport cu procesul electoral propriu-zis și în sisteme electorale care să acopere tipurile de scrutin existente oferă posibilitatea de a construi indicatori adecvați, cu condiția inerentă majorității analizelor de a putea lăsa în considerare, dacă nu întregul spectru politic, atunci partea lui semnificativă.

Această problemă a fost rezolvată empiric de Qualter (Qualter, 1968) care a propus și verificat pe cazul canadian următoarea formulă:

$$q_i = \frac{p_i^3}{\sum_{j=1}^4 p_j^3}, \{i \in 1, 2, 3, 4\}$$

unde indicii reprezentă, pentru cazul citat, ponderile partidelor conservator, liberal, laburist și restul spectrului politic, adică

$$p_4 = 1 - \sum_{j=1}^3 p_j.$$

În context, contribuția lui Qualter ridică o problemă esențială: de unde știm că această generalizare nu este circumstanțială, atâtă vreme cât ea nu a fost dedusă dintr-un corp de supozitii interpretabile în contextul fenomenului studiat?

## Noile idei ale lui Theil

Până la Theil existaseră discuții interminabile asupra subiectului, însă lipsa unui cadru analitic reducea abordarea acestuia fie la teme clare de cercetare axate pe probleme deschise, fie la eseuri discursive. După ce introduce ideea de entropie politică (Theil, 1969), Theil propune un punct de vedere care va influența abordările ulterioare (Theil, 1970). Întrucât nici tipul de raționament prin care acesta ajunge să propună un nou cadru pentru tratarea problemei nu este prezentat în vreo sursă cunoscută la această oră de către subsemnat, nici implicațiile și legăturile cu teorii sociologice actuale nu sunt analizate, subsecțiunea de față a articolului reprezintă o diminuare a acestei lacune. Faptul important situat dincolo de orice considerații concrete constă în aceea că direcția inițiată de Theil prezintă un avantaj din perspectiva interdisciplinară pusă de Haret la baza construirii unei teorii rationale privind fenomenele sociale: el preia un instrument matematic cu profunde ramificații și semnificații în particular în economia matematică, introducându-l în cadrele de analiză specifice științei politice.

Punctul de plecare al lucrării (Theil, 1969) îl constituie două propunerii empirice generate de efecte politice concrete:

- Situația spectrului politic olandez era următoarea: acesta conținea un număr *n* mare de partide politice cu ponderile electorale  $p_i$ ,  $i = 1, n$ , astfel încât cea mai mare dintre acestea aparținea unui partid minoritar. Consecința socio-politică directă constă în prelungirea pe perioade lungi de timp (de ordinul lunilor) a negocierilor de formare a unei coaliții de guvernare. Problema efectivă era de a mări şansele de obținere a unei majorități parlamentare, fie de către un partid, fie de către o coaliție, dar păstrând legătura cu distribuția opțiunilor electorale manifeste reprezentate prin ponderile în

cauză. F. Grosfeld a propus în preajma acestui moment, 1967, mărirea diferențelor relative dintre ponderile asociate partidelor din capetele intervalului (i.e., cel asociat celei mai mici ponderi, respectiv celei mai mari). Propunerea sa analitică constă în modificarea ponderii de decizie alocată pornind de la ponderile electorale după formula

$$q_i = \frac{p_i^2}{\sum_{j=1}^n p_j^2}, \{i \in 1, 2, \dots, n\} \quad (3.1)$$

Această modalitate a alocării puterii de decizie politică pornind *numai* de la ponderile electorale venea să înlocuiască pe cea a reprezentării utilizată de regula de atribuire cu prag (aici  $\theta$  este pragul electoral; spre exemplu  $\theta = 0,03$ )

$$q_i = 0, \quad \text{daca } p_i < \theta$$

$$\frac{p_i^2}{1 - \sum_{j|p_j > \theta} p_j}, \quad \text{daca } p_i > \theta; \quad (3.2)$$

• Într-o organizație ce conține membri cu ponderi de mărime puternic inegală, reprezentarea proporțională a transferului<sup>3</sup> poate duce la dominarea în privința deciziei de către anumiți membri; cazul în spate exemplificat este IFORS<sup>4</sup>. Maniera analitică aleasă pentru a ocoli acest efect ce afectează *satisfacția* membrilor, dar conservă spiritul reprezentării proportionale a constat în regula de transfer

$$q_i = \frac{p_i^2}{\sum_{j=1}^n p_j^2} \quad (3.3)$$

care conduce la o discriminare în detrimentul membrilor asociați cu ponderi  $p_i$  mari. De exemplu, dacă un membru are de  $k'$  mai mulți reprezentanți decât un altul, regula de alocare a voturilor în organizație îi asociază o forță de decizie de  $k$  ori mai

mare față de același membru.

Argumentele în favoarea modificării propuse de Grosfeld au fost două: primul constă în diferența de continuitate dintre cele două formule care produce același tip de discriminare în detrimentul partidelor asociate unor ponderi mici, însă fără a introduce un prag *arbitrар*; practic se poate spune că partidele se exclud singure prin lipsa bazei electorale. Al doilea este de tip spațial: în măsura în care analiștii lor înțeleg consecințele noii reguli de transfer a opțiunilor politice în putere de decizie, partidele sunt stimulate să formeze coaliții, fapt ce reduce considerabil gradul de divizare politică, sau așa numitul efect de fractionalizare.

Având în vedere că cele două variante analitice (3.1) și (3.3) corespund aceluiași efect de diminuare a influenței decizionale a unei anumite clase de membri, rezultă imediat *interpretarea* exponentului care decelează prin valorile sale (2, respectiv 1/2) cele două cazuri complementare: măsura în care este redusă (sau echivalent, măsura în care este amplificată) influența membrilor cu pondere consistentă (respectiv redusă) raportată la cazul ideal în care opțiunile electorale se regăsesc identic în spectrul de putere politică. De aici rezultă de asemenea și suportul analitic necesar ideii haretiene de parametrizare, rămânând a indica un cadru formal în care aceste intuiții oricând justificabile în cuvinte sau pe exemple, respectiv oricând atacabile pe aceleași căi, să poată fi găzduite într-un context teoretic adecvat a cărui principală calitate constă în a putea estima abaterile relative dintre situații.

Aspectul deosebit de important care izvorăște din latura pur tehnică a considerațiilor lui Theil rezidă în saltul conceptual la un număr oarecare de partide cu păstrarea efectului impus prin restricția de natură juridică a pragului de reprezentativitate. Altfel spus, este posibilă studierea fenomenului de transfer locuri-voturi luând în considerare efectele de excludere, deși

principalii competitori pot fi gândiți în întregul spectru politic. Bineînțeles, pentru cazul a două partide decelate prin indicii 1 și 2 s-au considerat mai multe reprezentări:

- cea inițială formalizată prin (1.1)
- forma echivalentă promovată de Qualter

$$q_1 = \frac{p_1^3}{p_1^3 + p_2^3}, q_2 = \frac{p_{21}^3}{p_1^3 + p_2^3}$$

- o altă formă echivalentă, denumită forma logaritică a legii cubului ce apare la Tuft

$$\ln \frac{q_1}{q_2} = 3 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

- forma ce generalizează aspectul precedent în contextul modelului logit

$$\ln \frac{q_1}{q_2} = \beta_0 + \beta_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

unde  $\beta_0, \beta_1$  sunt coeficienți de regresie (Theil, 1972).

Pentru a izola elementele apărute în considerațiile pur discursive, vom considera

$$\Delta_n^P = \{(p_1 + p_2, \dots, p_n) \mid \sum_{i=1}^n p_i\}$$

$$\Delta_n^Q = \{(q_1 + q_2, \dots, q_n) \mid \sum_{i=1}^n q_i\} \quad (3.4)$$

spațiul tuturor distribuțiilor electorale posibile ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) corespunzătoare unui spectru politic cu  $n$  actori, respectiv spațiul tuturor distribuțiilor de putere politică posibile ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) induse de un sistem electoral. Vom numi funcție de transfer a opțiunii electorale către puterea politică o aplicație

(3.5)

$$h: \Delta_n^P \rightarrow \Delta_n^Q, \quad q_i = h_i(p_1, p_2, \dots, p_n), \quad i = \overline{1, n}$$

Unul dintre avantajele imediate ale considerării acestei aplicații constă în aceea că putem exprima într-o manieră

clară, pe baze pur numerice, ce se înțelege prin conservarea opțiunilor electorale la nivelul puterii de decizie politică, printr-o formă particulară a acesteia;

$$q_i = h_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_i, \quad i = \overline{1, n}$$

(3.6)

adică aşa numita reprezentare proporțională. Pentru cazul  $n = 2$  și contextul britanic de la data amintită, Smith a constatat empiric că această aplicație are proprietatea (1.1), numită legea cubului, a cărei abateră de la reprezentarea proporțională se poate măsura prin raportarea la unitate a valorii 3 a exponentului.

Generalizarea pe care o propune Theil se referă nemijlocit la funcția de transfer, fiind

$$h: (0, \infty) \times \Delta_n^P \rightarrow \Delta_n^Q,$$

$$q_i = h_i^\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{p_i^\alpha}{\sum_{j=1}^n p_j^\alpha}, \quad (3.7)$$

$i = \overline{1, n}$

care conține evident drept cazuri particolare reprezentarea proporțională ( $\alpha = 1$ ), soluția lui Grosfeld ( $\alpha = 2$ ), legea cubului ( $\alpha = 3$ ), ponderarea decizională IFORS ( $\alpha = 1/2$ ). Din considerațiile de mai sus avem o interpretare imediată a exponentului  $\alpha$  drept măsură a abaterii de la reprezentativitatea proporțională a procedurii de transfer a opțiunilor electorale în putere politică.

Problema care ne preocupă se poate acum formula astfel: să se indice un cadru interpretabil sociologic din care să rezulte că generalizarea propusă este acceptabilă în termenii acestor interpretări. Primul pas în această direcție rezidă în a caracteriza matematic clasa de funcții de transfer (3.7).

Cadrul abstract ales de Theil pentru abordarea acesteia este teoria matematică a informației<sup>5</sup>, și el indică pentru ea

două soluții formale preluate din această teorie. Cum construcția prin care se dobândește interpretările în cauză depinde de aceste soluții formale, o scurtă digresiune asupra acestora este bine venită; ambele au legături deloc neglijabile cu perspectiva haretiană prin intermediul conceptului de principiu variațional.

1. În mecanica rațională este construit un cadru formal în care stările virtuale ale unui sistem definesc prin așa numitele principii variaționale stările reale ale acestuia. Această idee a fost preluată și pusă la baza analogiei cu mecanica socială de către Haret care-i indică (Haret, 1969) potențialitățile pe exemple abordabile la vremea aceea. Acest mecanism prin care optimizarea pătrunde ca metodă în chiar fundamentele domeniilor ce uzează de tehnici abstracte și concepții proprii mecanicii a pătruns în teoria matematică a informației prin intermediul termodinamicii, iar de aici în economia matematică. În acest sens ideile lui Theil, independente de moștenirea noastră haretiană se înscriu în liniile de principiu ale aceleiași traectorii de succesiune.

Apare însă o problemă de interpretare. În tîhp ce în fizică la fel ca și în economie pe anumite cazuri distribuția echifrecvențială reprezintă, după o expresie haretiană, "cazul fix de comparație" în raport cu care au sens cuvintele ca dezordine, dezechilibru, etc., pe cazul în discuție situația este diferită. Mai precis, în contextul ales distribuția echifrecvențială reprezintă de fapt cazul de idecidabilitate totală în care este imposibil de desemnat un căști-gător. Din acest motiv Theil consideră nimerit să interpreze entropia electorală (asociată unei distribuții de vot), respectiv politică (asociată unei distribuții de putere politică)

$$H_p = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i, \quad H_q = - \sum_{i=1}^n q_i \ln q_i \quad (3.8)$$

ca măsuri asociate cu efectele de fracționalizare a opinioilor politice din corpul electoral. Evident, ultima conține și efectele induse de tipul de sistem de vot, iar modalitatea de studiu propusă pentru a decela influența dintre acesta și opțiunile electorale independentă de algoritmul concret utilizat rezidă în clasa de funcții de transfer introdusă<sup>6</sup>.

Problema de optimizare corespunzătoare primei soluții formale a lui Theil este următoarea: funcția de transfer care minimizează variația totală de informație<sup>7</sup>

$$I: \Delta_n^q \times \Delta_n^p \rightarrow R, \quad I(q, p) = \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{q_i}{p_i} \quad (3.9)$$

între distribuțiile electorală și parlamentară a spectrului politic, în ipoteza unui transfer de entropie dat, corespunde clasei (3.7) pentru o valoare calculabilă a parametrului  $\alpha$ . În plus, dacă există un singur actor politic cu un număr maxim de voturi, valoarea lui  $\alpha$  este unică determinată (cf. Theil, p. 94).

Cu acestea, avem un cadru formal precizat cu ajutorul căruia generalizarea propusă la legea cubului migrează din domeniul mirărilor empirice în cel al dilemelor teoretice; această formulă este dedusă în acest cadru formal din ipoteze lesne de identificat, iar acum ne putem pune problema construirii unui context aplicat necesar testării conjecturilor adiacente.

2. Un alt punct de vedere, de data aceasta aparținând matematicii pure și importat de acolo pe calea filosofiei naturale în mecanica rațională este cel axiomatic, i.e. uzând de o prezentare discursivă datorată unui ilustru matematician francez din perioada iluministă: detectarea numărului *minim* de afirmații din care o teză poate fi dedusă<sup>8</sup>. Detaliile tehnice datorate lui Theil (Theil, 1969; Theil, 1972, p. 96) sunt o adaptare a axiomaticii propuse de Luce (Luce, 1959) pentru funcția psihofizică prin care se fundamentează matematic teoria scalelor de

măsurare, ambele reducându-se din punct de vedere abstract la ecuația funcțională D'Alembert (D'Alembert, 1796), valorificată în direcții distincte de Poisson (1811) și Cauchy (1826).

În mod evident, legea cubului reprezintă o încărcare flagrantă a principiului de reprezentare proporțională, iar clasa de funcții de transfer (3.7) permite să interpretăm parametrul  $\alpha$  și ca o măsură a abaterii de la aceasta. Din acest motiv Theil propune ca funcțiile de transfer ce verifică o lege a cubului generalizată, de forma

$$\frac{q_i}{q_j} = \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^\alpha, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, p_i, q_j \neq 0,$$

3.10

să se considere drept variantă slabă a reprezentării proporționale. În măsura în care o astfel de proprietate poate fi dedusă dintr-un set de ipoteze interpretabile, iar prin aceasta, caracterizată practic clasa funcțiilor de transfer corespunzătoare, se obține caracterizarea noționalizării acestui concept de măsură a gradului de reprezentare proporțională. În acest sens are loc următoarea teoremă:

#### Teorema 3.1 (Theil)

Dacă  $p \in \Delta_n^P$ ,  $q \in \Delta_n^Q$  și

- $\exists f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , continuă
- $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  cu  $p_i, q_j \neq 0$ , avem

$$\frac{q_i}{q_j} = f\left(\frac{p_i}{p_j}\right) \quad 3.11$$

atunci  $\exists \alpha \in (0, \infty)$  astfel ca  $f(x) = x^\alpha$ .

Ca o consecință imediată se deduce că funcțiile de transfer propuse corespund și cu această caracterizare. După știința autorului, asocierea cu valori ale lui  $\alpha$  a efectelor de tipul menționat prin interpretarea acestui parametru, asociate cu diverse algoritmi concreți din teoria algebrică a alocării electorale este încă o problemă deschisă. Din această perspectivă, faptele tratate aici sunt pur teoretice sau scala lor

coresponde domeniului politicii comparate.

Pentru a oferi o bază rațională aptă să ofere legătura cu aspectele sociologice ale problemei, Theil construiește un alt demers în care interpretarea joacă rolul esențial. El pornește de la remarcă conform căreia în soluția informațională determinarea lui  $\alpha$  se bazează pe o ipoteză pur matematică, dificil de interpretat în termeni sociologici, iar soluția axiomatică fundamentalizează numai aspectele logice ale deducției. Aceste remarcă sunt corecte având în vedere că ele fundamentalizează aspecte distincte ale problemei (distincte atât între ele cât și de aspectul sociologic).

Nu trebuie în nici un caz trasă de aici vreo concluzie, frecvent prezentată drept argument de cititor prea grăbiti privind inutilitatea aspectelor formale. Pe lângă faptul că fără acestea nu ar fi posibil să fim în măsură a face într-o manieră argumentabilă trecerea la prezenta etapă, chiar tehniciile matematice utilizate acolo sunt preluate pentru a extinde modelul (vezi mai jos contribuția lui Taagepera). În cazul unei noi formulări a problemei, ambele aspecte constituie puncte importante de inspirație, deoarece prima soluție atrage atenția asupra caracterului variațional, iar a doua caracterizează unicitatea soluției; obstacolul care ne împiedică se poate sintetiza prin întrebarea: care este conceptual sociologic pe care îl putem extrage din fenomenele analizate și îl putem promova într-un cadru compatibil la nivel de interpretare cu considerațiile matematice de mai sus?

Raționamentul este următorul: soluțiile empirice găsite de Grosfeld ( $\alpha = 2$ ) și alții ( $\alpha = 1/2$ ) vin de fapt să regleză o atitudine de grup care constă în *insatisfactia* generată de gradul în care reprezentativitatea globală este distribuită în raport cu propriile interese, argumentul de susținere a legitimității acestei insatisfacții fiind tocmai comparația cu reprezentarea proporțională. Altfel spus, ceea ce se optimizează de fapt în prima soluție nu este un

concept abstract relativ la exigențele sociologice, ci unul propriu corpului social haretian structurat în grupuri umane aflate în interacție socială. Descompunerea conceptului de insatisfacție în determinante haretiene noționalizabile prin variabile tratabile matematic porneste de la o situație inițială, trece printr-o stare de tensiune socială, se concretizează într-un sentiment de frustrare care se materializează într-o propunere de modificare a funcției de transfer (ceea ce a făcut și Grosfeld, la nivel pur empiric).

Tensiunea socială relativizată la sistemul de grupuri sociale se manifestă prin frustrarea generată la nivel de grup privind două aspecte argumentative ale acestora: rata de promovare a propriilor interese de grup și ponderea de opțiune a grupului obținută prin susținerea electorală. Cu această idee, rămâne să exprimăm acești doi factori stipulați drept determinanți, iar apoi să dăm o cale de evaluare a frustrării globale (a sistemului) care să dea un sens exact ideii de minimizare a insatisfacției din sistem. Acest raționament este esențial dependent de o ipoteză conform căreia orice reprezentant favorizează doar membrii grupului ce l-au promovat și numai pe acestia.

Theil arată, pentru un caz particular, că raportul  $p/q$ , reprezentă în contextul de interpretare admis contribuția grupului i la creșterea tensiunii în sistemul corespunzător funcției de transfer caracterizată de  $\alpha = 1/2$ . De aici, în cazul general raportul în cauză este termenul general, în care este explicitată dependența de parametrul de măsurare a reprezentativității proportionale slabe  $\alpha$ , din expresia funcției obiectiv (lagrangeanului) corespunzătoare generalizării propuse:

$$L(q; p, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i q_i^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n q_i\right) \quad (3.12)$$

în care tensiunea din sistem datorată

grupului  $i$  este parametrizată funcție de modul în care funcția de transfer se abate de la reprezentarea proporțională. Altfel spus, funcționează următoarea teoremă<sup>9</sup>.

**Teorema 3.2.** Clasa de funcții de transfer a opțiunilor de vot în putere de decizie politică (3.7) are proprietatea de optimalitate relativ la criteriul minimizării insatisfacției globale a sistemului de grupuri componente a adunării de reprezentanți, exprimată de lagrangeanul (3.12).

### Generalizarea unei teoreme a lui Theil

Studiul ipotezei de interacțiune constituie o problemă aparte care este mai aproape de efectele de grupare dintre actorii politici. Scopul prezentei secțiuni a articolului este de a vedea în ce măsură afectează astfel de efecte conceptul pus în discuție inițial de legea cubului și care este legătura dintre acestea și soluția bazată pe reprezentativitatea proporțională slabă introdusă de Theil.

Pentru aceasta, vom admite că sistemul format de actorii politici nu este de tip izolat, ceea ce analitic înseamnă că în expresia clasei de funcții de transfer introducem o măsură a interacției dintre elementele sistemului:

$$h: (0, \infty) \times I^n \times \Delta_n^p \rightarrow \Delta_n^q, \quad (4.1)$$

$$q_i = h_i^\alpha(r; p_1, p_2, \dots, p_n), \quad i = \overline{1, n}$$

Evident, aici  $I$  este o clasă de matrici numite matrici de interacție, iar apartenența matricii unitate ( $\delta_{ij}$ ) la aceasta asigură faptul că prezenta clasă conține clasa funcțiilor propuse de Theil.

Semnificația concretă a elementelor matricii ( $r_{ij}$ ) este următoarea:

- $r_{ij} = 1$  reprezintă susținerea pe care actorul  $i$  o acordă sisei. Cu aceasta, am inclus practic cazul fără interacție (al actorilor

concepți izolat) prin intermediul apartenenței matricii unitate la clasa menționată anterior;

- admitem că orice actor acordă susținerea maximă doar săi, ceea ce ne permite să considerăm că
- $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j, r_{ij} \in [0, 1]$  reprezintă susținerea pe care actorul  $i$  o acordă actorului  $j$ ;
- linia  $i$  conține componentele vectorului de susținere *acordată* de actorul  $i$  concurenților din spectrul politic;
- coloana  $j$  conține componentele vectorului de susținere *primită* de actorul  $j$  din partea concurenților din spectrul politic.

Urmărind raționamente similare cu cele ale lui Theil, se poate justifica pentru primul termen al lagrangeanului

$$L(r; q; p, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i \left( \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + \lambda \left( 1 - \sum_{i=1}^n q_i \right) \quad (4.2)$$

interpretarea următoare: tensiunea globală este formată din contribuția la aceasta datorată grupului generic  $i$  care nu mai depinde doar de modul în care transferul voturi-locuri favorizează membri cu pondere electorală mare ci și de interacțiile dintre componente spectrului politic. Aici tensiunea din sistem este parametrizată de un concept endogen care traduce structura internă a spectrului politic nu doar prin aspectul specificat de reprezentarea proporțională slabă. În acest sens, funcționează următorul rezultat care permite construirea unui cadru de răspuns pentru întrebarea pusă la începutul secțiunii de față.

**Teorema 4.1.** Clasa de funcții de transfer optimală relativ la lagrangeanul precedent este

$$\begin{aligned} q_k &= \sum_{i=1}^n \frac{p_i^\alpha}{\sum_{l=1}^n p_l^\alpha (\sum_{j=1}^n r_{lj}^{jl})^{1-\alpha}} \frac{r_{kj}^{ki}}{(\sum_{j=1}^n r_{kj}^{jl})^\alpha} \\ &= \frac{1}{\sum_{l=1}^n p_l^\alpha (\sum_{j=1}^n r_{lj}^{jl})^{1-\alpha}} \sum_{i=1}^n \frac{r_{kj}^{ki}}{(\sum_{j=1}^n r_{kj}^{jl})^\alpha} p_i^\alpha \end{aligned} \quad (4.3)$$

dacă matricea de interacție admite inversă ( $r^{-1}$ ).

#### Demonstrație:

Derivând expresia lagrangeanului (4.2.) în raport cu variabilele  $q_k$  avem sistemul<sup>10</sup>:

$$\begin{aligned} \partial_k L &= 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha} \sum_{i=1}^n p_i \left( \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \delta_{jk} q_j = \lambda \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha} \sum_{i=1}^n p_i q_j \left( \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \lambda, k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.4)$$

Admitând că matricea de interacție ( $r_{ij}$ ) este inversabilă, relația între  $q_k$  și multiplicatorul  $\lambda$  este, notând ( $r^{-1}$ ) inversa în cauză

$$\begin{aligned} p_i \left( \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} &= \frac{\alpha-1}{\alpha} \lambda \sum_{j=1}^n r_{ij}^{jl} \\ \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j &= \left( \frac{\alpha-1}{\alpha \lambda} \right)^\alpha p_i^\alpha \left( \sum_{j=1}^n r_{ij}^{jl} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ q_k &= \left( \frac{\alpha-1}{\alpha \lambda} \right)^\alpha \sum_{i=1}^n \frac{r_{kj}^{ki}}{\left( \sum_{j=1}^n r_{kj}^{jl} \right)^\alpha} p_i^\alpha \\ \lambda^\alpha &= \left( \frac{\alpha-1}{\alpha \lambda} \right)^\alpha \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \left( \sum_{j=1}^n r_{ij}^{jl} \right)^{1-\alpha} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Deci, combinând ultimele două egalități se obține relația din enunțul teoremei precedente.

Vom puncta acum câteva remarcări legate de teorema precedentă care ne vor permite să justificăm alegerea, iar de aici să putem defini în final clasa  $I'$ .

1. Inversibilitatea matricii de interacție se poate lesne interpreta apelând la o condiție echivalentă conform căreia liniile acesteia

## LEGEA CUBULUI

sunt vectori liniari independenți. Altfel spus, dacă convenim la nivel de interpretare ca orice doi actori distincți să primească susțineri diferite în sensul liniar independenței vectorilor de susținere, atunci este posibil să considerăm acceptabilă ipoteza de inversabilitate.

Condiția de inversibilitate a matricii de interacție poate fi inferată dintr-o ipoteză care admite o interpretare în termeni problemei studiate și în plus are o semnificație matematică ce ține de sistemele cu interacție.

Aceste considerații nu sunt întâmplătoare și o parte a seriei de succesiune privind aceste fapte este instructivă. inspirat de considerațiile lui D'Alembert, Lagrange a introdus în probleme de mecanică distințe ca natură (Lagrange, 1759), (Lagrange, 1762) o condiție asupra matricilor de interacție care a fost ulterior exprimată sub formă abstractă de J. Hadamard. Aceasta din urmă numește matrici cu diagonală dominantă matricile ( $r_i$ ) cu proprietatea

$$r_i = |r_{ii}| - \sum_{j=1}^n (1 - \delta_{ij})|r_{ij}| > 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.6)$$

Interpretarea asociată relației (4.6) în contextul care ne interesează este că orice actor acordă global concurenților mai puțină susținere decât siese. Referitor la aceste matrici de interacție se știe că ele sunt nedegenerate (cf. Gantmacher, p. 382). Prin urmare, proprietatea de dominantă a diagonalei devine o condiție esențială din perspectiva problemei de interacție<sup>11</sup> și o vom considera definitorie pentru clasa  $\Gamma'$ .

2. Teorema precedentă generalizează rezultatele lui Theil referitoare la sistemele cu interacție în modul următor. În primul rând, avem generalizările concrete, obținute prin particularizări ale matricii ( $r_i$ ). Astfel, în cazul  $r_i = \delta_i$  corespunde cazului sistemului izolat (fără interacție, în care orice actor acordă susținere nulă cu excepția cazului  $i = j$ ). Pe de altă parte, în

soluția generală a funcției de transfer (4.3) putem remarcă în termenul general două influențe, corespunzătoare unor ipoteze simplificatoare referitoare la matricea de interacție a sistemului.

**Corolarul 42.** În ipoteza că orice actor acordă global concurenților aceeași susținere, adică analitic matricea de interacție are proprietatea

$$r = r_i = |r_{ii}| - \sum_{j=1}^n (1 - \delta_{ij})|r_{ij}| > 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.7)$$

se arată imediat că pentru clasa funcțiilor de transfer (4.5) obținem forma

$$q_k = (2 - r) \sum_{i=1}^n \frac{p_i^\alpha}{\sum_{l=1}^n p_l^\alpha} r^{ki}, \quad (4.8)$$

### Demonstrație:

Intr-adevăr, cum elementele liniei  $i$  a matricei ( $r^i$ ) îndeplinește sistemul  $r^{i1}n_k + r^{i2}n_k + \dots + r^{in}n_k = \delta_{ik}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,

$$(4.9)$$

sumând după  $k$  obținem

$$r^{i1} \sum_{k=1}^n n_k + \dots + r^{in} \sum_{k=1}^n n_k = 1, \quad (4.10)$$

care cu ipoteza

$$\begin{aligned} r = r_i = r_{ii} - \sum_{j \neq i} r_{ij} &= 2r_{ii} - \sum_{j=1}^n r_{ij} \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^n r_{ij} &= 2r_{ii} - r = 2 - r \end{aligned} \quad (4.11)$$

implică

$$\sum_{j=1}^n r^{ij} = \frac{1}{2 - r} \quad (4.12)$$

Cu acestea, (4.3) devine (4.8).

Prin urmare, pentru o clasă de atribute cu care putem asocia interpretări coerente cu ipoteza din enunțul corolarului, conchidem că ponderea reprezentării proportionale slabe este intermediată de elementele inversei matricii de interacție.

3. Semnificația conceptuală de reprezenta-

tivitate proporțională în sens slab introdusă de Theil și concepută drept generalizare a legii cubului nu se mai regăsește nici ea în prezența ipotezei de interacție decât în cazuri particulare privind matricea de interacție. Cum interacția dintre actorii politici este un fapt incontestabil ce decurge din dimensiuni haretiene multiple (morale, ideologice, economice, etc.), iar neglijarea acesteia ar conduce la situații ce au puțin de-a face cu constatarilor empirice, are obiect următoarea remarcă: conceptul de reprezentare proporțională postulat legislativ și impus printr-o regulă de transfer indexată prin parametrul  $\alpha$  este valabilă numai în ipoteza  $r_{ij} = \delta_{ij}$ . Prin urmare, chiar dacă am accepta acest concept, el este perturbat de interacția dintre actorii politici și deci nu este valabil decât pe intervale mici comparativ cu ciclul electoral.

4. Distribuția de putere politică a spectrului în cele două cazuri, în absență și în prezență interacției între actorii politici, ne dă posibilitatea de a decela două aspecte: unul obiectiv, indus de opțiunile corpului electoral, și celălalt subiectiv, datorat preferințelor dintre actorii politici. Se cuvine să izolăm cele două influențe pentru a putea intui cum putem construi indicatori analitici de măsurare a unor astfel de efecte perturbatoare pentru concepte impuse de principii.

O cale generală constă în a realiza o descompunere a matricii de interacție care să fie compatibilă cu cele remarcate aici. Pentru aceasta fie descompunerea în parte sferică și deviatoare

$$n_j = \delta_{ij} - s_{ij}, s_{ij} = \delta_{ij} - n_j \quad (4.13)$$

pentru care obținem

$$r^{-1} = (I - s)^{-1} = I + \sum_{m=1}^{\infty} s^m \quad (4.14)$$

Prin urmare, uzând de descompunerea indicată putem obține cei doi termeni menționați, care pentru cazul particular din (4.8) au expresiile

$$q = p^\alpha + p^\alpha \sum_{m=1}^{\infty} s^m, \quad (p^\alpha)_i = \frac{p_i^\alpha}{\sum_{l=1}^n p_l^\alpha} \quad (4.15)$$

Acest fapt dă posibilitatea de a descompune cele două influențe amintite mai înainte, iar analitic, uzând de ecuația Hamilton-Cayley se poate estima prin invațanții tensoriale ai părții deviatoare efectele de interacție care pentru valori mici ale lui  $n$  se pot utiliza pentru verificarea unor programe informatiche mai generale<sup>12</sup>.

## Valorificarea Taagepera

Studiul la care a preluat Taagepera problema generalizării legii cubului se distinge printr-un alt conținut informațional decât al contributorilor amintiți până aici; elementele de inspirație au fost următoarele:

- Prima analiză formală clară datorată lui Kendall și Stuart a lăsat să se întrevadă atât posibilitatea de a aborda acest aspect al problemei, dar și necesitatea reformulării acesteia în cadrele interne științei politice. Această contribuție mai conține două aspecte importante. Primul constă în detectarea direcțiilor în care nu trebuie căutată vreo soluție nici măcar la nivel de formulare până precedenta etapă nu a fost măcar înțeleasă. Al doilea rezidă în clasificarea modelelor abstracte apte de a surprinde interacția spațială dintre districte; acest gen de abordare necesită considerații specifice, mai ales de ordin matematic și nu va fi atins aici.

- Una dintre remarcile de bază aparținând lui Duverger referitoare la valabilitatea legii cubului în sistemul britanic constă în aceea că abaterile de la aceasta au drept cauză probabilă o nouă partitură în circumscriptii care antrenează o defavorizare evitabilă pentru unul dintre cei doi competitori (cf. Duverger, 1976, p. 430). Acest

fapt are o importanță aparte deoarece este independent de orice efect de opinie publică. Mai mult, operând corecția, legea cubului se verifică. Prin urmare, este posibil ca presupusa influență să existe, sau operational vorbind, într-o generalizare a legii cubului rolul unei posibile noi variabile care să parametrizeze acest efect trebuie să aparțină cel puțin numărului de circumscriptii. Evident, această afirmație este implicită considerațiilor lui Duverger.

- Contribuțiile lui Theil au indicat mai multe aspecte privind dorita generalizare. Poate cel mai important dintre acestea constă în aceea că este singurul care enunță fără echivoc ipotezele în care afirmațiile sale au loc și acest fapt "tehnic", simplu în aparență, permite să știm și de unde pornim dar mai ales ce vrem să modificăm, rămânându-ne a decide cum să facem aceasta.

Dintr-o perspectivă mai aplicată, este prima oară când se dă un cadru în care exponentul din legea cubului dobândește semnificație și poate fi determinat în ipoteze cu valoare de interpretare relativ la fenomenul studiat, prin calcul. Două fapte notabile ne rețin aici atenția:

- semnificațiile cadrului formal importat din teoria matematică a informației sunt construite în termeni specifici sociologiei, oferind prin aceasta posibilitatea de a continua și în această direcție căile harețiană și duvergeriană de descoperire nu doar a legilor, ci a modelelor care conțin aceste legi.
- se deschide calea unui model în care interacția poate fi identificată cu prețul anumitor ipoteze restrictive la aspectul comunicational, fapt valorificat ulterior de Taagepera.

Aspectele luate în analiză de Taagepera merită și expuse și analizate pe rând. Primul ca importanță rezidă în evidențierea unor variabile de care depinde exponentul de parametrizare a legii cubului și orice analiză rațională a unui astfel de subiect trebuie să indice cum s-a ajuns la o astfel de concluzie; altfel nimic nu va pri-

cepe decât partea pur numerică a cadrului formal. Poate pare simplu, tautologic ori aproape absurd să pui întrebarea: de ce exponentul din legea cubului este 3? ... însă pentru ca aceasta să aibă o noimă trebuie introduși parametri justificabili cu ajutorul cărora să determinăm o astfel de valoare.

Modelul lui Theil prezentat discursiv într-o secțiune precedentă alături de ideea de dimensiune optimală a unei adunări de reprezentanți sugerează un nou demers cristalizat sub forma unui model de Taagepera (1972). Ideea de bază a acestui model este conținută în următorul criteriu de optimitate: dimensiunea unei adunări de reprezentanți este optimă dacă minimizează timpul de reacție dintr-un proces comunicational cheltuit pentru luarea unei decizii.

Noul model obținut pe baza acestei idei este operaționalizat după cum urmează (aceste formulări trebuie comparate cu cele din sursele următoare: (Taagepera, 1972, 1986, 1989):

1. Variabila timp este exclusă din model fiind înlocuită prin supozitia conform căreia majoritatea intervalului de timp utilizat în luarea unei decizii este reprezentat de procesele de comunicare.
2. Procesele de comunicare se reduc la două clase: cele dintre un reprezentant generic cu cei reprezentați și cele dintre reprezentanți; procesele din ambele clase consumă în medie același timp.
3. Estimarea consumului de timp a unui proces de comunicare prin *numărul* canalelor de comunicare ce pot interveni în acest proces este acceptabilă.

Se negligează orice alte activități consumatoare de timp.

Cu acestea, variabilele prin care formalizăm modelul vor fi

- $S$  - numărul de locuri;
- $P$  - populația electorală activă;
- $c$  - numărul canalelor de comunicare internă;
- $c_s$  - numărul canalelor de comu-

nicare externă;

$$\bullet c = c_s + c_e$$

(numărul total<sup>13</sup> al canalelor de comunicare);

iar ecuația de determinare a relației dintre  $P_s$  și  $S$  este

$$\frac{dc}{ds} = 0, \quad (5.1)$$

fapt care corespunde definiției dimensiunii optimale precizată discursiv mai sus, care acum, analitic, revine la următoarea problemă: să determinăm valoarea lui  $S$  care minimizează numărul total al canalelor de comunicare, ori, altfel spus, să căutăm estimări pentru  $c_s$  și  $c_e$ , astfel încât funcția  $c = c(S)$  să admite un unic punct de minim.

Setul de ipoteze simplificatoare indicat de Taagepera este următorul:

1. comunicarea externă dintre reprezentanții ce formează dimensiunea numerică a adunării-S este datorată populației electorale active, i.e. electorilor care sunt potențial în poziția de a exercita un vot informat. Cum numărul mediu pe reprezentant al acestora este  $P_a/S$  și putem admite că orice reprezentant are calitatea duală de receptor și emițător rezultă

$$c_s = 2 \frac{P_a}{S} \quad (5.2)$$

2. comunicarea internă dintre reprezentanți o reducem la două componente: discuțiile directe dintre un reprezentant generic cu ceilalți  $S - 1$ , privit cu aspectul dual menționat mai sus și monitorizarea discuțiilor dintre oricare alți doi reprezentanți, ceea ce conduce la

$$c_e = 2(S - 1) + \frac{(S - 1)(S - 2)}{2} \quad (5.3)$$

Admitând aceste ipoteze simplificatoare obținem funcția elementară

$$c(S) = \frac{S^2}{2} + \frac{S}{2} - 1 + \frac{2P_a}{S} \quad (5.4)$$

care fiind convexă

$$c'(S) = S + \frac{1}{2} - \frac{2P_a}{S^2}, \quad c''(S) = 1 + 2 \frac{P_a}{S^3} \quad (5.5)$$

admete un minim determinat de ecuația (5.1). Cum constanta este neglijabilă ca ordin de mărime în prezența celorlalți termeni, avem aproximarea care inferă concluzia:

$$c'(S) \equiv S - \frac{2P_a}{S^2} = 0 \Rightarrow 2P_a = S^3, \quad (5.6)$$

sau echivalent

$$S = (2P_a)^{\frac{1}{3}} \quad (5.7)$$

Această relație numită de Taagepera legea cubului a mărimii unei adunări este verificată numeric pe numeroase cazuri concrete, fapt care nu ne privește aici. Important este modul în care, presupunând independența membrilor față de disciplina de partid și existența către unui mandat pe circumscripție, s-a putut da un cadru în care se determină relația dintre  $S$  și  $P_s$ . Evident, acest cadru este fenomenologic în sensul că el nu ține seama de structura adunării; de exemplu un reprezentant PDSR ar discuta cu aceeași probabilitate cereri ale electorilor CDR sau alte combinații de acest tip. El este și determinist, de fapt. Totuși aici accentul cade pe următorul fapt frecvent utilizat în detectarea unor indicii de construcție a modelelor: deși ipotezele făcute au dat o concluzie care se confirmă, nu înseamnă că acestea sunt acceptabile, ci că acum știm un fapt pe care o construcție ulterioară trebuie să-l asigure.

Deși atât la Theil cât și la Taagepera s-a introdus ideea de interacție, diferența dintre punctele lor de vedere este considerabilă. Primul utilizează această idee pentru a revizui conceptul de reprezentare proporțională din perspectivă pur teoretică, pe când al doilea abordează pe cale empirică problema valabilității legii cubului și la alte cazuri importante din punct de vedere socio-politic. Evident, scara la care se plasează problema are o importanță aparte.

Problema originară a legii cubului este abordată de Taagepera pe aceeași cale de tip empiric, încercând o sinteză a contribuțiilor de până la el. Indicația lui Duverger introduce în discuție o posibilă nouă variabilă  $D$ , numărul de districte alături de vechea variabilă  $V$ , numărul de votanți. Consecința imediată a considerațiilor precedente este următoarea: legea cubului este valabilă în cadrul de ipoteze admis și pentru cazul dimensiunii adunării sub forma relației (5.7). Acest fapt are consecințe notabile asupra a ceea ce am putea numi cadrul de semnificație a legii cubului, mai ales dacă explicităm la nivel formal relațiile care să introducă în generalizare influența variabilei  $D$ . Să notăm pe scurt raționamentele în urma cărora acest lucru se poate realiza efectiv.

Cum există numeroase procese electorale prin care alegerea reprezentanților se face în trepte, iar o generalizare trebuie să ia în considerație astfel de proprietăți generice ale acestor algoritmi, admitem că dacă  $V$  votanți aleg  $D$  subreprezentanți, iar aceștia  $T$  reprezentanți, atunci forma generalizată a legii cubului (este vorba despre relația (1.1), bineînțeles cu exponentul  $\alpha$  în locul lui 3) se aplică tuturor pașilor. Altfel spus, avem

$$\alpha(V, D) = \frac{\alpha(V, T)}{\alpha(D, T)} \Leftrightarrow \alpha(V, D)\alpha(D, T) = \alpha(V, T) \quad (5.8)$$

Semnificația acestei relații conține argumentul multiplicativ al lui Theil (vezi Theil, 1969, 1972, p. 96 și compară cu Taagepera, 1986 pp. 491, 502). Raționamentul prin care se obține o ecuație funcțională este specific unui domeniu de bază al mecanicii raționale, analiza dimensiunală; el a fost utilizat explicit de Poisson (1811, pp. 45-9) devenind apoi instrument de lucru în fizică, economia matematică, ecologie, etc. Să-l explicităm<sup>14</sup>.

Membrul stâng din (5.8) nu depinde explicit de  $T$ , ceea ce înseamnă că pentru valori fixate, altfel arbitrar, date lui  $V$

și  $D$ , orice valoare i-am atribui acestei variabile,  $\alpha(V, D)$  va rămâne același ca valoare. În măsură în care  $D$  poate fi conceput ca variabilă de aceeași natură ca și  $V$ , forma funcției obținute la numărător și numitor pentru o valoare de referință  $T = T_0$  este aceeași, ceea ce implică

$$\alpha(V, D) = \frac{f(V)}{f(D)} \quad (5.9)$$

Pentru a obține o ecuație funcțională ce determină funcția necunoscută  $f$ , vom introduce cu Taagepera (cf Taagepera, 1972, 1986, 1989) următoarea ipoteză de omogenitate a opțiunilor politice: gradul de grupare a votanților similari după criteriul opțiunii politice este invariant relativ la partiziile statistic reprezentative.

Cu aceasta, exprimând acest grad de grupare la nivel global și local se obține ecuația funcțională

$$f\left(\frac{V}{D}\right) - f(1) = f(V) - f(D) \quad (5.10)$$

care cu condiția inițială  $f(1) = 0$  se reduce la ecuația funcțională D'Alembert cu soluția  $f(x) = \ln(x)$

Cu acestea, Taagepera propune următorul sistem care generalizează legea cubului, numit ecuațiile locuri-voturi:

$$\frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{\ln V}{\ln D}; \quad (5.11)$$

acestea, alături de legea cubului, a mărimii adunărilor sunt verificate pe numeroase cazuri compatibile cu contextul a priori admis.

Extinderea la situația mai generală, însă frecventă, în care sistemul electoral este caracterizat de alocări multiple de locuri pentru caz multipartidist, necesită introducerea unei noi variabile (ale cărei motivații fiind în mare similară raționamentelor expuse, o vom omite), care să țină seama de magnitudinea circumscriptiei. Evident aici se atinge problema Kendall-Stuart din (KS III). Noul sistem locuri-voturi, aplicabil și cazului în

care alocarea se face prin algoritmi de reprezentare proporțională (cum sunt cei de tip d'Hondt, ori generalizări ale acestora) devine

$$\frac{q_1}{q_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\alpha}, \quad \alpha = \left( \frac{\ln V}{\ln DM} \right)^{\frac{1}{M}}; \quad (5.12)$$

unde variabila  $M$ , magnitudinea medie a

circumscripțiilor, are pragurile de clasificare determinate empiric, adică prin inspectarea situațiilor prezente în sistemele electorale din mai multe țări. Cu acestea, am obținut un sistem predictiv la scală mare a cărui bază de semnificații și utilități este legea cubului, dobândind cadrul teoretic a cărui operaționalizare în vederea aplicațiilor este expusă într-o altă lucrare.

## Note și bibliografie

1. De fapt acesta nu afiră incompatibilitatea, ci neagă identificarea promovată de anumiți contributori contemporani.
2. Vezi pentru alte detalii Kendall & Stuart, 1950, pp. 183-4 unde o parte din actul citat este reprodus.
3. Analitic prin aceasta se înțelege funcția identitate,  $p_i = q_i$ ,  $i=1, n$ .
4. International Federation of Operational Research Societies.
5. Cititorul poate consulta Theil, 1967, Guiașu, 1968 etc.
6. Omitem aici alte considerații asupra conceptului de entropie ori a altor variante în spetea în știință politică deoarece subiectul fiind destul de delicat, merită o atenție specială, spre exemplu în sensul tratat în (Coleman)
7. Folosim aici notații consacrate, literele boldface desemnând variabile vectoriale de dimensiuni clare prin context iar cele simple variabilele scalare asociate. Spre exemplu  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ .
8. Pentru contextul acestei asemănări cititorul poate consulta cu folos Opusculele matematice ale lui D'Alembert.
9. Acest enunț este indicat de Theil (1972) însă omitem demonstrația deoarece rezultă ca un caz particular al teoremei din secțiunea următoare.
10. Aici am notat  $\delta_k$  derivarea parțială în raport cu variabila  $q_k$ .
11. și nu numai; acestea intervin în anumite condiții de stabilitate din analiza numerică.
12. Pentru cazul unui număr relativ mic de actori politici ( $n \leq 5$ ) aceste calcule la nivel pur abstract sunt parțial cunoscute din teoria plasticității cristalelor, confirmând încă o dată valoarea analogiei haretiene.
13. Aici intervine ipoteza de clasificare de mai sus
14. La acest punct ne depărtăm de genul de argumente datorate lui Taagepera.

## LEGEA CUBULUI

- J.C. Borda, Mémoires sur les élections au Scrutin, Hist. de l'Acad.Sci.Paris (1781), p. 00, traducere în engleză, Isis, vol. 44, p. 42-51, 1953.
- A.L. Cauchy, Détermination des fonctions continues d'une variable propre à vérifier certains conditions, Ex.de Math (1826), p.221-229, Oeuvrè s, ser. II, tome 3, p. 98.
- S. Coleman, Measurement and Analysis of Political Systems: A Science of Social Behavior, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- M.J.A.N.C. Condorcet, Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, Hist. de l'Acad. Sci. Paris (1785), p. 1-304.
- A. Cournot, Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, Hachette, Paris, 1838, reeditare Calman-Lévy, Paris, 1974.
- J.R. D'Alembert, Mémoire sur les Principes de la Mécanique, Hist. de l'Acad. Sci.Paris (1769) p. 278-286.
- M. Duverger, Les partis politiques, Armand Colin, Paris, 1976.
- F.Y. Edgeworth, "Applications of the Theory of Probability", Journal of the Royal Statistical Association (1898), p. 520-537.
- S. Guiașu, Aplicații ale teoriei informației. Sisteme dinamice. Sisteme cibernetice, Ed. Academiei R.S. România, București, 1968.
- S. Haret, Mécanique sociale, Gauthier-Villars, Paris, 1910, traducere în română de A.G. Apostol, Ed. Științifică, București, 1969.
- M. Iosifescu, Gh. Mihoc și R. Theodorescu, Teoria probabilităților și statistica matematică, Ed. Tehnică, București, 1966.
- M.G. Kendall și A. Stuart, "The Law of the Cubic Proportion in Election Results", British Journal of Sociology 1 (1950), p. 183-196 etc.
- J. L. Lagrange, Recherches sur la nature et la propagation du son, Miscellanea Taurinensis 1 (1759)
- J. L. Lagrange, "Solutions de différents problèmes de calcul intégral", Oeuvrè s 1 (1762), p. 471-668, nr. 36.
- S. Luiller, Examen du mode d'élection proposé à la Convention Nationale de France en février 1793, et adopté au Comité Législatif par Simone Lhuillier et imprimé par ordre du Comité, Comité Législatif, Geneva, 1794, reeditat în Mathématiques et sciences humaines, vol. 54, p. 7-24.
- R.D. Luce, "On the Possible Psychophysical Laws", Psychological Reviews 66 (1959), p. 81-95.
- S.D. Poisson, Traité de Mécanique, Didot, Paris, 1811.
- T. H. Qualter, "Seats and Votes: An application of the Cube Law to the Canadian electoral system", Canadian Journal of Political Science 1 (1968), p. 336-344.
- J.-J. Rousseau, Du contrat social, Flammarion, Paris, 1938, prima ediție publicată în anul 1762.
- G. Sartori, Parties and Party Systems: A Framework for Analysys, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- R. Taagepera, "The Size of National Assemblies", Social Science Research 1 (1972), p. 385-401.
- R. Taagepera, "Seats and Votes: A Generalisation of the Cube Law of Elections", Social Science Research 2 (1973), p. 257-275.
- R. Taagepera, "Reformulating the Cube Law for Proportional Representation Election",

- American Political Science Review 80 (1986), nr. 2, p. 489-504.
- R. Taagepera și M.S. Shugart, Seats and Votes. The Effects and Determinants of Electoral Systems, Yale University Press, New Haven, 1989.
- F. R. Gantmaher, Teoria matricilor, ed. Nauka, Moscova, 1988 (lb. rusă).
- H. Theil, Economics and Information Theory, North Holland, Groningen, 1967.
- H. Theil, "The desired political entropy", American Political Science Review 63 (1969), p. 521-525.
- H. Theil, "The Cube Law Revisited", Journal of American Statistical Association 65 (1970), p. 1213-1219.
- H. Theil, Statistical Decomposition Analysis with Applications in the Social and Administrative Science, North Holland, Amsterdam, 1972.
- E.R. Tufte, "The Relationship between Seats and Votes in Two-Party Systems", American Political Science Review 67 (1973), p. 540-547.
- A.D. Xenopol, "Cauzalitatea în succesiune", Analele Academiei Române 28 (1904), nr. 7, p. 531-577