O TEOREMĂ DE IMPOSIBILITATE PRIVIND AGREGAREA INDICATORILOR SOCIALI

Gheorghe Păun

Universitatea București

În studiul de față se demonstrează o teoremă de imposibilitate asemănătoare celebrei teoreme a lui Arrow[1]. Teorema arată că nu există indicatori agregați care sînt simultan sensibili, anticatastrofici și noncompensatori. Acest rezultat justifică teoretic slăbiciunile unor indicatori agregați, de asemenea, fundamentează necesitatea considerării de profile de indicatori asociate entităților sociale.

1. Introducere

Este cu totul inutil să mai vorbim despre importanța indicatorilor socioeconomici. În ultima sută de ani, majoritatea economiștilor (și sociologilor) au gîndit și au scris în termeni de indicatori. În ultimul timp se vorbește chiar despre o mișcare a indicatorilor *(social indicator movement)*, de la care se așteaptă clarificări și sugestii importante în vederea soluționării marilor probleme cu care este confruntată lumea de astăzi.

Pe de altă parte, se poate vorbi de o adevărată criză a indicatorilor. Insuficiența indicatorilor economici a devenit clară. A gîndi numai în termeni de indicatori economici, cu alte cuvinte a fi interesați numai de problemele creșterii economice, este o poziție cu totul riscantă și periculoasă, cu consecințe grave pe plan social, psihologic, ecologic și politic. Necesitatea considerării unor indicatori sociali potriviți a devenit imperioasă, dar identificarea unor asemenea indicatori este încă o problemă controversată. Mulți dintre indicatorii existenți sînt criticați pentru diferite motive, de cele mai multe ori, întemeiate.

Dificultățile și disputele legate de indicatorii sociali continuă, în ciuda faptului că s-au făcut eforturi de cercetare deosebite în această direcție și în ciuda numărului mare de lucrări scrise în acest domeniu. Studiul de față se adugă celor existente cu intenția de a introduce un punct de vedere nou în abordarea problemei. Pe scurt, scopul său nu este de a releva slăbiciunile indicatorilor existenți sau de a propune noi indicatori, ci de a răspunde la întrebarea : *de ce au apărut aceste slăbiciuni și de ce nu au fost ele încă înlăturate*?. Vom încerca să soluționăm această problemă luînd în considerație proprietățile globale ale indicatorilor, cerințele naturale care apar atunci cînd se construiește (se alege) un indicator. Instrumentul de abordare este de natură logico-matematică.

În acest cadru vom deduce că identificarea unui sistem *redus* de indicatori *buni* este o problemă dificilă, uneori imposibil de rezolvat. Mai exact, orice indicator agregat care este *sensibil* (semnalează modificările importante care apar în procesul la care se referă) și *anticatastrofic* (nu face salturi mari pentru modificări mici) trebuie să fie *compensatoriu* (pune pe aceeași treaptă indivizi, procese etc. foarte diferiți). Un asemenea indicator nu este considerat *bun*. În consecință, există o limitare intrinsecă, principială, care ne împiedică să construim indicatori agregați. Rămîn două căi de urmat : sau considerăm sisteme bogate de indicatori aranjați în *profile de indicatori*, sau lucrăm cu indicatori agregați, conștienți de faptul că ei au slăbiciuni considerabile. Pledăm pentru prima alternativă. Totuși, aceasta implică necomparabilitatea enti-

[1] K.J. Arrow, *Mathematical methods in social sciences*, Proc. of First Standford Symp., Standford Univ. Press, 1959.

„VIITORUL SOCIAL", AN IX, NR. 4, P. 674—678 BUCUREȘTI, 1980

tăților sociale (cum ar fi, de exemplu, calitatea vieții), imposibilitatea optimizării matematice, dificultăți legate de estimarea efectelor proceselor sociale (nu se pot defini relații de ordine semnificative din punct de vedere social pe mulțimi de vectori multidimensionali).

2. Căi de reducere a dimensiunilor sistemelor de indicatori

Este o constatare banală faptul că majoritatea fenomenelor sociale au descrieri multidimensionale. Să ne gîndim, de exemplu, la conceptul de *calitate a vieții*. Chiar fără o analiză prea adîncă, se poate vedea că aceasta depinde de foarte mulți parametri (se spune chiar că numărul componentelor calității vieții este egal cu numărul trebuințelor omului). În consecință, cel puțin la începutul investigației, trebuie să luăm în considerație o multitudine de indicatori asociați acestei noțiuni.

Pe de altă parte, o tendință evidentă a oricărui specialist, o condiție a manipulării cu ușurință a sistemelor de indicatori este reducerea dimensiunilor acestor sisteme. Apare astfel o situație contradictorie : procesele sociale reale impun sisteme largi de indicatori, dar, pentru rațiuni diferite, noi căutăm sisteme reduse de indicatori. În principiu, există două căi de reducere a numărului de indicatori (folosite împreună de cele mai multe ori) : *selecția* și *agregarea*. În cîteva cuvinte, selecția presupune ignorarea unor indicatori și păstrarea altora. Există multe metode, mai mult sau mai puțin sofisticate, care pot fi folosite ca instrumente de selecție. După o preselecție pe baze intuitive, logice, se pot folosi metode statistice, cum ar fi regresia, analiza factorială etc. În multe situații reale, selecția se face în raport cu anumite priorități, preferințe, intuiții.

O cale nouă (în fapt, folosită în mod inconștient în selecțiile pe care trebuie să le facem în fiecare zi) de rezolvare a problemei selecției este următoarea, bazată pe un *principiu de invarianță*. Fie I o mulțime de informații folosite (în condiții concrete date) pentru a deduce o mulțime de concluzii C legate de anumite obiective O. Dacă aceleași concluzii C pot fi obținute prin folosirea unei submulțimi I' a lui I, atunci putem spune că trecerea de I la I' este o selecție care nu implică nici o pierdere de informație. Invarianța mulțimii C legitimează selecția.

În cazul nostru, datele de intrare I sînt formate de indicatorii primari, de valorile acestora. Dar ... cunoașterea mulțimii C este toată problema ! După cunoașterea concluziilor nu mai avem nevoie de nici o selecție ! Prin urmare, principiul invarianței nu poate fi aplicat în legătură cu C. Procedăm atunci astfel. Precizăm mai întîi o submulțime C' a lui C, mai ușor de obținut plecînd de la datele inițiale. După aceea, validăm selecțiile prin principiul invarianței luînd pe C' ca mulțime de validare. Fie I' mulțimea de indicatori selectați. Extrapolăm apoi invarianța de la C' la C și reținem pe I' ca selecție validă pe care o folosim în faza următoare pentru a deduce toate concluziile din C. Evident, procedura schițată mai sus conține unii pași riscanți, cel mai important fiind alegerea lui C' ca mulțime-test. În plus, ca pentru orice procedură statistică, bogăția și calitatea datelor au o influență puternică asupra calității rezultatelor. Nu vom discuta mai mult despre selecție. Dorim doar să subliniem riscurile pe care le implică selecția. Pot fi eliminați indicatori importanți ; în plus, importanța indicatorilor (relevanța lor) se modifică în timp și depinde de numeroși factori variabili etc.

A doua cale de reducere a numărului de indicatori este *agregarea*. Să considerăm o mulțime de indicatori, $j_1, j_2, \ldots, j_n$, care asociază numere reale unor subiecți (indivizi, grupuri, țări etc.). Să ne gîndim, de exemplu, la retribuție, la numărul de paturi de spital la mia de locuitori, la durata medie a vieții etc. Agregarea indicatorilor $j_1, j_2, \ldots, j_n$ presupune găsirea unei funcții $g : R^n \to R$ care asociază o valoare $g(j_1(s), \ldots, j_n(s))$ valorilor $j_i(s)$ ale indicatorilor inițiali pentru un subiect s oarecare. (Mulțimea $\{j_1, j_2, \ldots j_n\}$ nu este în mod necesar *întreaga* mulțime de indicatori cu care lucrăm, ci doar ansamblul indicatorilor pe care dorim să-i agregăm). Prin agregare, comparabilitatea fenomenelor evaluate prin indicatorii în cauză este asigurată ; $(j_1(s), \ldots, j_n(s))$ nu sînt comparabili, dar numerele $g\ (j_1\ (s), \ldots, j_n(s))$ sînt.

Există totuși două aspecte neplăcute în legătură cu agregarea. În primul rînd, în multe cazuri, funcția g nu este injectivă. Atunci, așa cum este de așteptat, agregarea atrage după sine o pierdere de informație. Acest lucru se poate demonstra formal : asociem fiecărui vector de intrare o probabilitate — frecvența de apariție — și calculăm entropia cîmpului de probabilitate înainte și după agregare. Prin urmare, dacă dorim să obținem un anumit tip de informație printr-un indicator sintetic, atunci avem de plătit chiar cu informație.

Pe de altă parte, nu se cunosc indicatori agregați *buni* și asemenea indicatori nici nu există, după cum vom demonstra în secțiunea următoare. Printr-un indicator bun înțelegem unul care este *sensibil, anticatastrofic* și *noncompensatoriu*. Înțelesul acestor termeni va fi precizat într-un mod foarte general, în cadrul unei „logici lingvistice" care permite manevrarea riguroasă a unor entități imprecise, vagi, cum ar fi atributele *mare, mic, foarte mare* etc. Conform tezei de necombătut după care „dimensiunile norilor nu se măsoară cu șublerul", acest cadru neprecis este (cel mai) adecvat abordării unei problematici nebuloase, care „nu acceptă zecimalele", cum este spațiul social.

3. Teorema de imposibilitate a agregării

Fie din nou $j_1, j_2, \ldots, j_n$ și $g: R^n \to R$ ca mai sus. Următoarele trei condiții ni se par absolut firești pentru aplicația g și pentru orice altă funcție de agregare:

a. aplicația g trebuie să fie *sensibilă*, adică ea trebuie să fie monotonă, aproape strict crescătoare în raport cu indicatorii primari de tip pozitiv și aproape strict descrescătoare în raport cu indicatorii primari de tip negativ. Se spune că un indicator este de tip pozitiv dacă situațiile bune sînt caracterizate de valori mari și se zice de tip negativ în cazul contrar. Să precizăm ce înțelegem prin „aproape strict crescător" pe un exemplu. Să considerăm problema calității vieții și un indicator primar cum ar fi retribuția. Pentru intervale largi, orice creștere a retribuției implică o creștere a calității vieții, deci acest indicator este de tip pozitiv. Totuși, la o creștere *mică*, nu ne putem aștepta la o creștere sesizabilă a calității vieții unui individ. Acest lucru se întîmplă însă dacă retribuția crește în mod *semnificativ*. Astfel, *aproape strict crescător* descrie proprietatea lui g că pentru creșteri *semnificative* ale unui argument, valoarea lui g crește, dar acest lucru nu are loc neapărat și pentru creșteri *mici*.

b. Aplicația g trebuie să fie *anticatastrofică*, adică pentru modificări *mici* ale argumentelor, modificările funcției trebuie să fie și ele *mici* (valorile funcției nu trebuie să aibă salturi). Este evident că pentru marea majoritate a indicatorilor socioeconomici această cerință este obligatorie. Ea nu este obligatorie în domeniul biologic, de exemplu, acolo unde creșterea temperaturii corpului cu o zecime de grad poate însemna exact trecerea peste o temperatură critică dincolo de care starea de sănătate se deteriorează catastrofic.

c. În sfîrșit, funcția g trebuie să fie *noncompensatorie*, în sensul următor. Pentru fiecare argument considerăm cîte un interval prag (de lungime evaluată ca *foarte mare*). Dacă doi vectori din R^n au cel puțin o componentă ale cărei valori diferă mai mult decît pragul asociat, atunci aplicația g trebuie să ia valori *semnificativ* diferite pentru acești doi vectori. Prin urmare, indiferent de valorile altor argumente, dacă valorile unui argument sînt *foarte diferite*, atunci valorile funcției sînt și ele cel puțin *semnificativ* diferite.

Din nou, pentru calitatea vieții, să considerăm două persoane, una cu retribuția foarte mare, iar cealaltă cu retribuția foarte mică. Indiferent de condițiile de locuit, de aprovizionare, de condițiile de muncă etc., cele două persoane nu pot fi considerate a avea aceeași calitate a vieții. Tocmai această condiție este formulată la punctul **c**.

La prima vedere, pare firesc ca orice indicator social să respecte condițiile **a, b, c** (să fie „bun"). Într-adevăr, mulți indicatori existenți sînt criticați tocmai pentru că încalcă una sau alta dintre aceste condiții (evident, criticile nu sînt formulate exact în termenii de aici). Din păcate, nu există indicatori agregați „buni".

Teorema de imposibilitate a agregării. *Nu există nici o aplicație* $g: R^n \to R$ *care să satisfacă simultan condițiile* **a, b, c** *de mai sus.*

Demonstrație. În formularea condițiilor **a, b, c** am folosit termenii *mic, semnificativ, mare, foarte mare* cu referire la valori, creșteri, diferențe. Vom presupune că aceste estimări sînt definite prin valori-prag alese în mod potrivit pentru fiecare indicator în parte. De exemplu, pentru indicatorul „retribuție", o creștere *mică* este, să zicem, nu mai mare de 50 de lei, una *semnificativă* este de 50—200 de lei, iar una *foarte mare* de peste 800 de lei. În raționamentele următoare, singura condiție pe care o impunem acestor praguri este să fie *omogene*, proporționale pentru toți indicatorii și *aceleași pentru toate cele trei condiții* **a, b** și **c**. Întotdeauna vom presupune că avem relațiile de ordine induse de secvența *mic, semnificativ, mare, foarte mare*.

Să presupunem acum că există o funcție $g: R^n \to R$, $n \geqslant 2$, care satisface simultan cele trei condiții. Pentru un vector fixat $\alpha = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-2})$ să considerăm funcția $g_\alpha(x, y) = g(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_{n-2})$.

Să presupunem că indicatorii j_1, j_2 corespunzători primelor două argumente sînt, ambii, de tip pozitiv. Prin urmare, aplicația g este aproape strict crescătoare în raport cu aceste argumente. Rezultă că și g_α este aproape strict crescătoare în raport cu ambele ei argumente. Cazul în care unul dintre cei doi indicatori sau amîndoi sînt negativi se poate trata exact în același mod.

Să considerăm cîte două valori pentru x şi y suficient de îndepărtate între ele, astfel încît diferenţa lor să fie *foarte mare*. Fie x_m, y_m valorile inferioare şi x_M, y_M cele superioare alese astfel. Considerăm următoarele patru funcţii (obţinute din g_α prin fixarea cîte unui argument):

$$g_1(x) = g_\alpha(x,\ y_m);$$

$$g_2(x) = g_\alpha(x,\ y_M);$$

$$g_3(y) = g_\alpha(x_m,\ y);$$

$$g_4(y) = g_\alpha(x_M,\ y).$$

Să considerăm şi următoarele patru puncte:

$$\mathbf{a} = g_1(x_m) = g_\alpha(x_m,\ y_m) = g_3(y_m);$$

$$\mathbf{b} = g_2(x_m) = g_\alpha(x_m,\ y_M) = g_3(y_M);$$

$$\mathbf{c} = g_4(y_m) = g_\alpha(x_M,\ y_m) = g_1(x_M);$$

$$\mathbf{d} = g_4(y_M) = g_\alpha(x_M,\ y_M) = g_2(x_M).$$

Valorile **a** şi **d** sînt valorile extreme ale funcţiei g_α pe intervalele $(x_m,\ x_M)$, (y_m, y_M), iar **b** şi **c** sînt puncte intermediare. Pentru a face mai clar raţionamentul care urmează, să considerăm reprezentările grafice din figura 1. Diferenţa dintre x_M şi x_m este *foarte mare*; de asemenea, cea dintre y_M şi y_m. Prin urmare ţinînd seama de condiţia **c**, numerele $g(x_m, \alpha), g(x_M, \alpha)$ sînt cel puţin în mod *semnificativ* diferite. Sînt posibile două cazuri: sau $b<c$ sau $c<b$. Ambele pot fi tratate în acelaşi mod. Să presupunem că avem $b>c$, adică ne aflăm în situaţia din figura 1.

Să ne îndreptăm atenţia asupra figurii 1 b. unde proiecţiile celor două grafice pe axa verticală se suprapun. Fie y_1, y_2 două valori distincte pentru y astfel încît $g_3(y_1) \leqslant c \leqslant g_3(y_2)$, adică $g(x_m, y_1, \alpha) \leqslant c \leqslant g(x_m, y_2, \alpha)$. Dacă diferenţa $g_3(y_2) - g_3(y_1)$ este *mică*, atunci $g_3(y_2) - c = g(x_m, y_2, \alpha) - g(x_M, y_m, \alpha)$ este, de asemenea, *mică*. Acest lucru contrazice condiţia **c**. Prin urmare, diferenţa între $g_3(y_2)$ şi $g_3(y_1)$ trebuie să fie cel puţin *semnificativă*. Conform condiţiei **b**, rezultă că şi diferenţa $y_1 - y_2$ trebuie să fie cel puţin *semnificativă*.

Să ne gîndim la valorile lui y intermediare între y_1 şi y_2. Din condiţia **a** rezultă că aplicaţia g_3 (deci şi g pentru argumentele potrivite) ia valori intermediare între $g_3(y_1)$ şi $g_3(y_2)$. Toate aceste valori trebuie să fie la o distanţă *semnificativă* de punctul c (conform condiţiei **c**). Prin urmare, există y_3 între y_1 şi y_2 astfel încît pentru $y < y_3$ valorile lui g_3 sînt semnificativ mai mici decît c, iar pentru $y > y_3$ valorile lui g_3 sînt semnificativ mai mari decît c. În punctul y_3, de asemenea, valoarea lui g_3 trebuie să fie *semnificativ* diferită de c. Să considerăm două valori ale lui y, foarte apropiate de y_3 (deci cu diferenţa între ele mică), una mai mare decît y_1 şi una mai mică decît y_3. Conform condiţiei **b**, valorile lui g_3 pentru aceste puncte trebuie să fie la o distanţă *mică* una de alta. Contradicţie! Existenţa funcţiei g este imposibilă.

Observaţie. Demonstraţia anterioară decurge identic chiar dacă nu considerăm funcţia g definită pe R^n, ci pe un dreptunghi n-dimensional. Acest caz este mult mai realist. De exemplu, putem lua dreptunghiul determinat de intervalele pe care fiecare indicator j_i are o interpretare

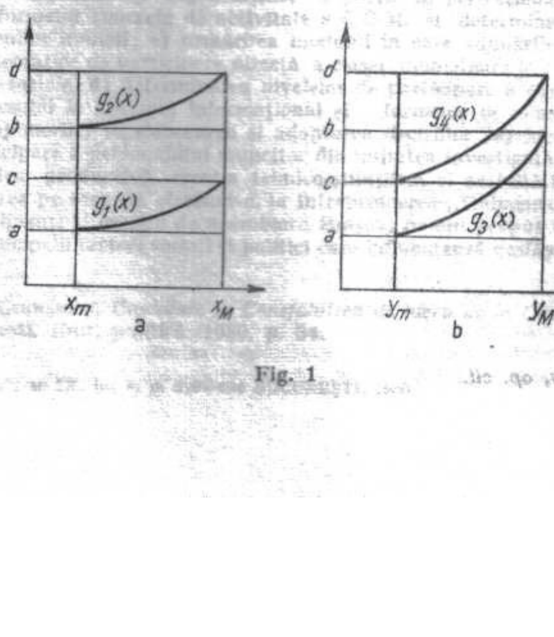

Fig. 1

unitară (fiecare indicator în parte este de tip pozitiv sau negativ pe acest interval). Singura restricție pe care trebuie să o considerăm este ca dimensiunile acestor intervale să fie *foarte mari*. Mai mult, putem lucra pe un spațiu discret, nu neapărat pe intervale reale. În acest caz trebuie să ne asigurăm că valorile inițiale sînt total ordonate și că diferența între oricare două valori consecutive este *mică*.

4. Concluzii

Deși la un nivel foarte general, abordarea propusă în acest studiu a condus la rezultate semnificative, iar teorema de imposibilitate a agregării, în ciuda formulării ei negative, are un caracter foarte pozitiv. Într-adevăr, ea este complet aplicabilă și chiar *aplicată* prin toate consecințele care decurg din ea. Ea explică și justifică criticile ce se aduc indicatorilor, nereușita încercărilor de a construi indicatori agregați buni.

Concluzia principală ce o formulăm este aceea că există dificultăți intrinseci în calea descreșterii numărului de indicatori care descriu o situație socială oarecare. O realitate care este în esența ei multilaterală trebuie abordată prin sisteme de indicatori multidimensionale. Trebuie să ne concentrăm spre abordarea și înțelegerea multilaterală a fenomenelor sociale, spre planificarea și evaluarea proceselor prin *profile multidimensionale de indicatori*.

Ca o consecință, rezultă de aici necomparabilitatea principială a entităților sociale ; nu se pot face ierarhizări pertinente în domeniul social pentru că nu putem compara realități multidimensionale. (Nu putem compara vectori decît în cazul foarte particular în care *toate* componentele unui vector sînt mai mari ca ale altuia.)

În sfîrșit, să remarcăm asemănarea teoremei noastre cu teorema imposibilității agregării ierarhiilor[2]. Arrow definește însă „raționalitatea" agregării în cu totul alt cadru și pentru obiecte de altă natură. Asemănarea celor două teoreme se oprește la tipul de teoremă care arată că anumite obiecte, dorite, căutate, așteptate de multă lume nu există și nu pot exista.

---

[2] K. J. Arrow, *op. cit.*